

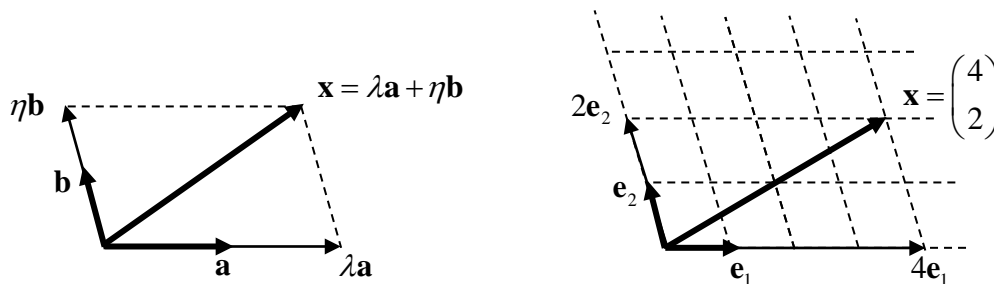
## STERA\_WAVE テクニカルマニュアル Ver.1.0

## 1. スペクトル解析の基礎

2次元空間 ( $\mathbf{R}^2$ ) 上のベクトル  $\mathbf{x}$  を、別のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の係数倍の和で表す。 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が 1 次独立であれば、係数は一意に決まる。

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \eta \mathbf{b} \quad (1)$$

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  として、大きさ 1 のベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  を考えると、係数はベクトル  $\mathbf{x}$  の座標成分となる。このとき  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  を基底ベクトルといい、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  が直交している場合を直交座標系、それ以外を斜交座標系という。



ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積は、それぞれの成分を  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{i=1}^2 a_i b_i = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2)$$

で定義される。ここに、 $|\mathbf{a}|$  はベクトル  $\mathbf{a}$  のノルム (長さ) であり、

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (3)$$

また、 $\theta$  はベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  間の角度である。

直交基底ベクトルでは内積とノルムは

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad |\mathbf{e}_1| = \sqrt{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = \sqrt{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)} = 1, \quad (4)$$

となる。

いまベクトル  $\mathbf{x}$  が、直交基底ベクトルを用いて

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \quad (5)$$

と分解されているとき、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  のそれぞれの内積をとると、

$$\lambda_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1), \quad \lambda_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \quad (6)$$

となり、座標成分  $\lambda_1, \lambda_2$  が求められる。すなわち

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \quad (7)$$

$$\lambda_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad i=1,2 \quad (8)$$

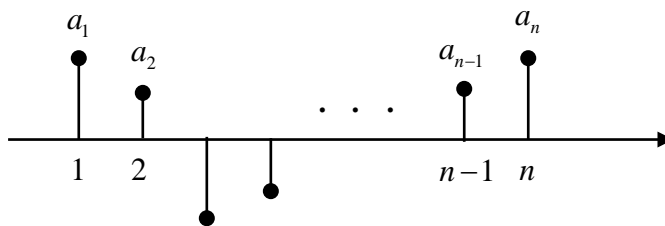
同様に、3次元空間 ( $\mathbf{R}^3$ ) 上のベクトル  $\mathbf{x}$  は、直交基底ベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を用いて

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \quad (9)$$

$$\lambda_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad i=1,2,3 \quad (10)$$

と分解することができる。つまり3次元空間の座標成分  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  が求められる。

ここで、ベクトルは“矢印”というイメージから離れて、以下のように一般化する。いま、 $n$ 次元空間 ( $\mathbf{R}^n$ ) に属するベクトル  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  の成分を  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T$  とする。成分を並べると以下のような図が描ける。



任意のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  について、

- ①  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  なら  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- ②  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  なら  $\lambda \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  (ここに  $\lambda$  はスカラー)

が満足される。また、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積は

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (11)$$

であり、以下の性質がある。

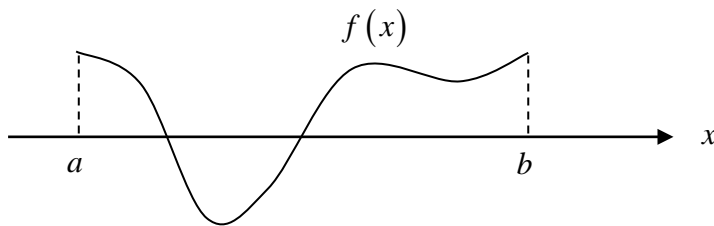
- ①  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$  とくに  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$  なら  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
- ②  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
- ③  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$
- ④  $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

このとき、ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  は、直交基底ベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{R}^n$  を用いて、以下のよう  
に成分に分解することができる。つまり、 $n$ 次元空間の座標成分が求まる。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \tag{12}$$

$$\lambda_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad i=1, 2, \dots, n \tag{13}$$

次に、区間  $[a, b]$  で定義される連続関数の集合  $\mathbf{C}$  と、 $\mathbf{C}$  に属する関数  $f(x)$  を考える。  
図を比較すれば、関数  $f$  は成分の数が無限大のベクトルと解釈することができる。



任意の関数  $f, g$  について、集合に属することを記号  $\in$  で表せば、

- ①  $f, g \in \mathbf{C}$  なら  $f+g \in \mathbf{C}$
- ②  $f \in \mathbf{C}$  なら  $\lambda f \in \mathbf{C}$  (ここに  $\lambda$  はスカラー)

が満足される。このような集合  $\mathbf{C}$  を **関数空間** という。また、関数  $f, g$  の内積を

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \tag{14}$$

と定義する。ベクトルと同じように、以下の性質がある。

- ①  $(f, g) \geq 0$  とくに  $(f, f) = 0$  なら  $f(x) = 0$
- ②  $(f, g) = (g, f)$
- ③  $(f+g, w) = (f, w) + (g, w)$
- ④  $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$

ベクトルと同じように、内積  $(f, g) = 0$  のとき、関数  $f$  と  $g$  は直交するという。また、  
関数  $f$  の大きさを  $|f| = \sqrt{(f, f)}$  とする。このように内積が定義される関数空間を **ヒル  
ベルト空間** という。

このとき、関数  $f \in \mathbf{C}$  は、大きさ 1 の互いに直交する関数列  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \mathbf{C}$  を用いて、  
以下のように成分に分解することができる。

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i \tag{15}$$

$$\lambda_i = (f, \phi_i) = \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

これを**スペクトル分解**という。つまりヒルベルト空間では、関数がベクトルに、直交関数を用いたスペクトルが直交座標の成分に、それぞれ対応している。

## 2. フーリエ級数展開

直交関数列  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \mathbf{C}$  の例として、 $\sin$  や  $\cos$  関数の集まりを考える。

$$\sin 0 \cdot x, \cos 0 \cdot x, \sin 1 \cdot x, \cos 1 \cdot x, \dots, \sin n \cdot x, \cos n \cdot x, \dots$$

これらは、区間  $(-\pi, \pi)$  で互いに直交する大きさ 1 のベクトルである。ただし、ここでの内積は、

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad (17)$$

と定義する。実際

$$(\sin nx, \sin mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (18)$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (19)$$

$$(\sin nx, \cos mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0 \quad (20)$$

となる。したがって、ヒルベルト空間のスペクトル分解から、任意の関数  $f$  は、区間  $(-\pi, \pi)$  で次のような成分に分解される。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (21)$$

ここに、

$$a_n = (f, \cos nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (22)$$

$$b_n = (f, \sin nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

実は一箇所間違いがある。というのは、

$$(\cos nx, \cos mx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (23)$$

と書いたが、 $n = m = 0$  のときだけ

$$(\cos 0x, \cos 0x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2 \quad (24)$$

となるのである。そのため、 $n = 0$  のときだけ係数を半分にしななければならないので、正しくは

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (25)$$

となる。これをフーリエ級数展開という。ここで、

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (26)$$

を代入すると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \quad (27)$$

ここで、第1項は、 $b_0 = 0$ から

$$\frac{a_0}{2} = \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right)_{n=0} \quad (28)$$

さらに、第3項は、 $a_{-n} = a_n$ ,  $b_{-n} = -b_n$ から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) \quad (29)$$

となるので、まとめると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad (30)$$

ここに、

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (31)$$

となる。

(例題)

$y = x^2$  ただし  $(-\pi \leq x \leq \pi)$  のフーリエ級数展開を求めよ

(回答)

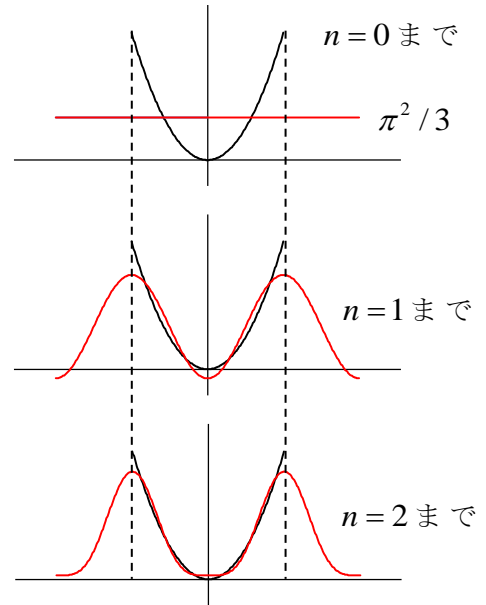
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0$$

より

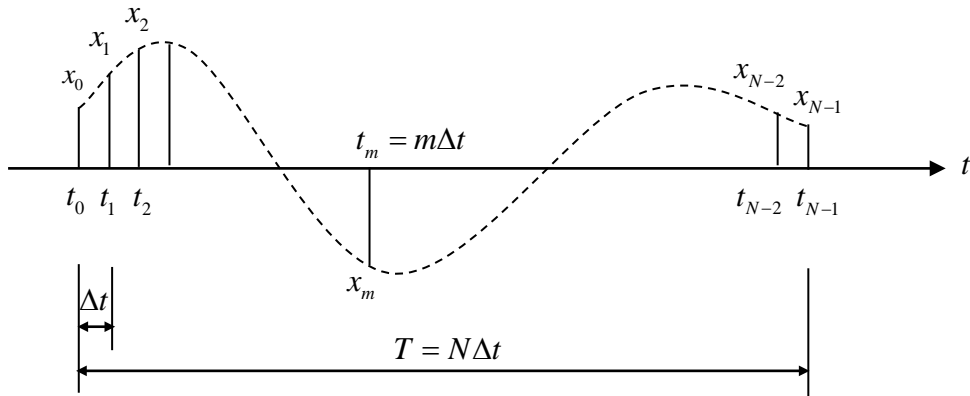
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$



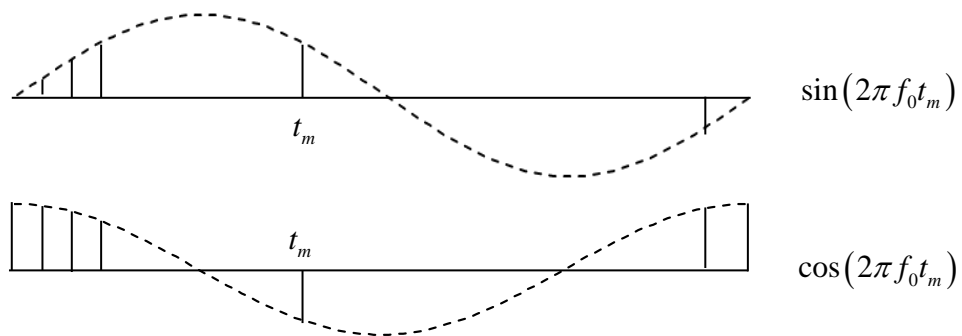
図からも足し合わせる項の数 ( $n$ ) を増やと近似の精度が増すことが分かる。一方、フーリエ級数展開は区間  $(-\pi \leq x \leq \pi)$  における近似であり、それ以外の区間では周期  $2\pi$  で繰り返す関数となる。

### 3. 有限フーリエ級数

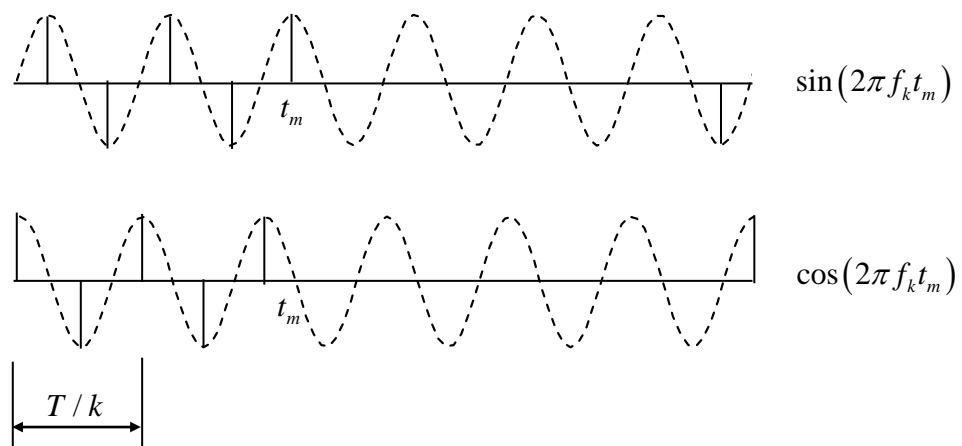
次に、地動加速度データのように、離散的な値から構成される波形データについてフーリエ級数展開を考えてみよう。波形は、一定の時間間隔  $\Delta t$  でサンプリングされた  $N$  個の離散データ  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$  とする。波形の継続時間は  $T = N\Delta t$  となる。



周期が  $T$  と等しくなる三角関数の離散データは、基本振動数を  $f_0 = 1/T$  とすれば、



振動数が  $f_k = k f_0$  の場合は、





となる。ここで、

$$2\pi f_k t_m = 2\pi(kf_0)(m\Delta t) = \frac{2\pi km}{T/\Delta t} = \frac{2\pi km}{N} \quad (32)$$

より、

$$\sin(2\pi f_k t_m) = \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \quad \text{および} \quad \cos(2\pi f_k t_m) = \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) \quad (33)$$

と書ける。

離散関数  $f(m), g(m)$ ,  $m=0,1,2,\dots,N-1$  の内積を

$$(f(m), g(m)) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)g(m) \quad (34)$$

と定義すると

$$\left(\sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right)\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) \sin\left(\frac{2\pi km}{N}\right) = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ N/2 & l = k \neq 0 \\ 0 & l = k = 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right)\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ N/2 & l = k \neq 0 \\ N & l = k = 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$\left(\sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right), \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right)\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin\left(\frac{2\pi lm}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi km}{N}\right) = 0 \quad (37)$$

の関係が成立するので、三角関数の離散データは、直交関数となることがわかる。これより、離散波形データ  $x_m$  ( $m=0,1,2,\dots,N-1$ ) を、直交関数を用いて成分に分解することができる。無限大まで和をとらずに  $N/2$  で打ち切ると

$$x_m = \sum_{k=0}^{N/2} \left( A_k \cos \frac{2\pi km}{N} + B_k \sin \frac{2\pi km}{N} \right) \quad (38)$$

と表せる。 $k=0$  のときには  $\cos \frac{2\pi km}{N} = 1$ ,  $\sin \frac{2\pi km}{N} = 0$  なので  $A_0$  が残るが、あとの内

積の表現に合うように  $A_0$  を  $A_0/2$  としておく。また、 $k=N/2$  のときは  $\sin \frac{2\pi km}{N} = 0$  と

なるので  $A_{N/2} \cos \frac{2\pi km}{N}$  が残るが、これも  $A_{N/2}$  を半分の  $A_{N/2}/2$  としておく。すると、級数和は以下のようになる。

$$x_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left( A_k \cos \frac{2\pi km}{N} + B_k \sin \frac{2\pi km}{N} \right) + \frac{A_{N/2}}{2} \cos \frac{\pi(N/2)m}{N} \quad (39)$$

これを有限（または離散）フーリエ級数という。フーリエ係数は、内積と関数直交性を利用すれば、次式から求まる。

$$A_k = \frac{2}{N} \left( x_m, \cos \frac{2\pi km}{N} \right) = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cos \frac{2\pi km}{N}, \quad k=0,1,2,\dots,\frac{N}{2} \quad (40)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \left( x_m, \sin \frac{2\pi km}{N} \right) = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sin \frac{2\pi km}{N}, \quad k=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (41)$$

有限フーリエ級数は、 $\frac{2\pi km}{N} = \frac{2\pi km}{T/\Delta t} = 2\pi(kf_0)(m\Delta t) = 2\pi f_k t_m$  より

$$x_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} (A_k \cos(2\pi f_k t_m) + B_k \sin(2\pi f_k t_m)) + \frac{A_{N/2}}{2} \cos(2\pi f_{N/2} t_m) \quad (42)$$

とも書ける。これより、連続関数

$$x(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} (A_k \cos(2\pi f_k t) + B_k \sin(2\pi f_k t)) + \frac{A_{N/2}}{2} \cos(2\pi f_{N/2} t) \quad (43)$$

は、 $N$ 個のデータ点  $t=t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$  で両辺の値が一致する。右辺の最高振動数は

$$f_{N/2} = \frac{N}{2} f_0 = \frac{N}{2T} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (44)$$

であり、これをナイキスト振動数と呼ぶ。すなわち、波形  $x(t)$  がこれ以上の振動数を含んでいても、有限フーリエ級数では表現できないという意味で、振動数分解能を表している。また、フーリエ級数展開は区間  $(0 \leq t \leq T)$  における近似であり、それ以外の区間では周期  $T$  で繰り返す関数となる。

(39)式の有限フーリエ級数に

$$\cos \frac{2\pi km}{N} = \frac{e^{i\frac{2\pi km}{N}} + e^{-i\frac{2\pi km}{N}}}{2}, \quad \sin \frac{2\pi km}{N} = \frac{e^{i\frac{2\pi km}{N}} - e^{-i\frac{2\pi km}{N}}}{2i} \quad (45)$$

を代入すると

$$x_m = \sum_{k=0}^{N/2} \left( \frac{A_k - iB_k}{2} e^{i\frac{2\pi km}{N}} \right) + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left( \frac{A_k + iB_k}{2} e^{-i\frac{2\pi km}{N}} \right)$$

ここで

$$A_k + iB_k = A_{N-k} - iB_{N-k} \quad (46)$$

$$e^{-i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi(N-k)m}{N}\right)} \quad (47)$$

の関係を用いて整理すると、以下の有限複素フーリエ級数が得られる。

$$x_m = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)}, \quad m=0,1,2,\dots,N-1 \quad (48)$$

$$C_k = \frac{A_k - iB_k}{2} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (49)$$

なお、 $C_{N-k} = C_k^*$  (\*は共役複素数) より、 $C_k$  ( $k=0,1,2,\dots,N/2$ ) が分かればよい。

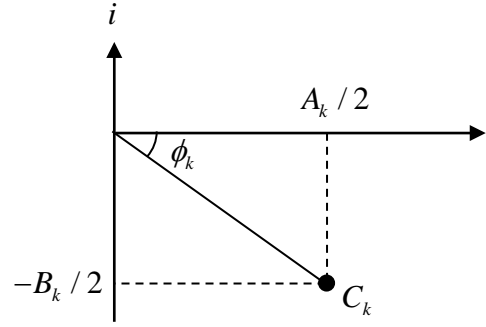
フーリエ係数を振幅と位相を用いて表すと

$$C_k = |C_k| e^{i\phi_k}$$

ここに

$$|C_k| = \frac{1}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left( -\frac{A_k}{B_k} \right)$$



なお、振動数を横軸にして  $|C_k|$  と  $\phi_k$  をグラフ化したものを、それぞれ **振幅スペクトル** と **位相スペクトル** という。ただし、後述するように、波形のフーリエスペクトルというときには、振幅スペクトル  $|C_k|$  に継続時間  $T$  を掛けた値のことをいう。

コンピュータで地震動波形のフーリエ変換を計算するには、この有限フーリエ級数を用いる。本書では説明しないが、有限フーリエ係数を求める画期的なアルゴリズムに **高速フーリエ変換** がある。

なお、

$$x_m = x(t), \quad t = m\Delta t \quad (m=0,1,2,\dots,N-1),$$

$$\text{継続時間 } T = N\Delta t, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}, \quad \omega_k = k\Delta\omega \quad (k=0,1,2,\dots,N-1)$$

とおくと

$$2\pi km / N = 2\pi k \left( \frac{t}{\Delta t} \right) / N = k \left( \frac{2\pi}{T} \right) t = k\Delta\omega t = \omega_k t$$

従って、 $x(t)$ ,  $t = m\Delta t$  ( $m=0,1,2,\dots,N-1$ ) の有限フーリエ変換は

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(t) e^{-i\omega_k t}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (50)$$

有限フーリエ逆変換は

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i\omega_k t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (51)$$

と書くこともできる。

#### 4. フーリエ変換

関数  $x(t)$  のフーリエ変換およびフーリエ逆変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (52)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (53)$$

あるいは、 $\omega = 2\pi f$  の関係を用いて

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(2\pi ft)} dt \quad (54)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (55)$$

と定義される。

先の有限フーリエ係数

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (56)$$

において、時間軸の原点を継続時間  $T = N\Delta t$  の中央にとると、

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} x_m e^{-i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} (x_m \Delta t) e^{-i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)} \quad (57)$$

継続時間  $T = N\Delta t$  を一定のまま、標本数を増やすと、 $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$  より、

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} dt \quad (58)$$

同様に有限フーリエ級数は、振動数軸の原点を中央にとると

$$x_m = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} C_k e^{i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)}, \quad m = -N/2+1, \dots, 0, 1, \dots, N/2 \quad (59)$$

標本数を増やすと、 $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$  より、

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} \quad (60)$$

ここで、

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (TC_k) e^{i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} \frac{1}{T} \quad (61)$$

として、継続時間  $T \rightarrow \infty$  とすれば、 $\frac{k}{T} \rightarrow f, \frac{1}{T} \rightarrow df$  さらに  $TC_k \rightarrow F(f)$  として

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (62)$$

となり、フーリエ逆変換に一致する。同様に、有限フーリエ係数は、

$$TC_k = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)} dt \quad (63)$$

として、 $T \rightarrow \infty$ ,  $TC_k \rightarrow F(f)$  とすれば

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(2\pi ft)} dt \quad (64)$$

となり、フーリエ変換に一致する。

フーリエスペクトルは

$$|F(f)| = |TC_k| = \frac{T}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (65)$$

フーリエ位相スペクトルは

$$\phi_k = \tan^{-1} \left( -\frac{A_k}{B_k} \right) \quad (66)$$

となる。

< 演習問題 >

サイン波形

$$x_m = x(t_m) = \sin(\omega_0 t_m) = \sin(2\pi k_0 m / N), \quad t_m = m\Delta t \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

のフーリエスペクトルを求めよ。

< 解答 >

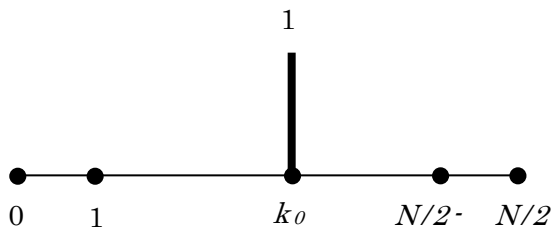
有限フーリエ逆変換

$$x_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left[ A_k \cos \frac{2\pi k m}{N} + B_k \sin \frac{2\pi k m}{N} \right] + \frac{A_{N/2}}{2} \cos \frac{2\pi(N/2)m}{N}$$

との比較から、

$$A_i = 1, \quad i = k_0, \quad A_i = 0, \quad i \neq k_0, \quad B_i = 0$$

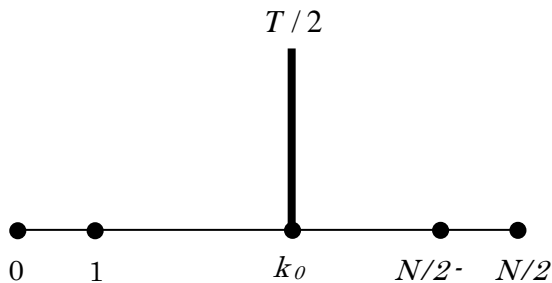
従って、フーリエ係数をグラフにすると



フーリエスペクトルは

$$|F(f)| = |TC_k| = \frac{T}{2} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \frac{T}{2} A_{k_0} = \frac{T}{2} = \frac{N\Delta t}{2}$$

なので、スペクトル振幅は継続時間  $T$  の半分となる。



つまり、同じサイン波形でも継続時間によってフーリエスペクトルの振幅が異なる結果となる。

5. 速度応答スペクトルとフーリエスペクトル

地動加速度波形  $a(t)$  のフーリエ変換は、継続時間を  $T$  とすると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^T a(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^T a(t) \cos \omega t dt - i \int_0^T a(t) \sin \omega t dt \quad (67)$$

従って、フーリエスペクトルは、

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left(\int_0^T a(t) \cos \omega t dt\right)^2 + \left(\int_0^T a(t) \sin \omega t dt\right)^2} \quad (68)$$

となる。一方、 $a(t)$  を入力とする 1 自由度系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -ma \quad (69)$$

または

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -a \quad (70)$$

時刻  $t$  での変位  $x(t)$  は、時間  $0 \sim t$  までの入力  $a(t)$  を考えればよいので

$$x(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t a(\tau) e^{-h\omega'(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau, \quad \omega' = \omega\sqrt{1-h^2} \quad (71)$$

応答速度は

$$\dot{x}(t) = \int_0^t a(\tau) e^{-h\omega'(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \int_0^t a(\tau) e^{-h\omega'(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau \quad (72)$$

減衰定数  $h=0$  のとき

$$\dot{x}(t) = \int_0^t a(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(t-\theta) \quad (73)$$

$$\text{ここに、} A = \int_0^t a(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad B = \int_0^t a(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad \tan \theta = A/B \quad (74)$$

従って、速度の最大値（速度応答スペクトル  $S_v(\omega)$ ）は

$$S_v(\omega) = \left| \sqrt{A^2 + B^2} \right|_{\max} = \left| \sqrt{\left(\int_0^t a(t) \cos \omega t dt\right)^2 + \left(\int_0^t a(t) \sin \omega t dt\right)^2} \right|_{\max} \quad (75)$$

となる。

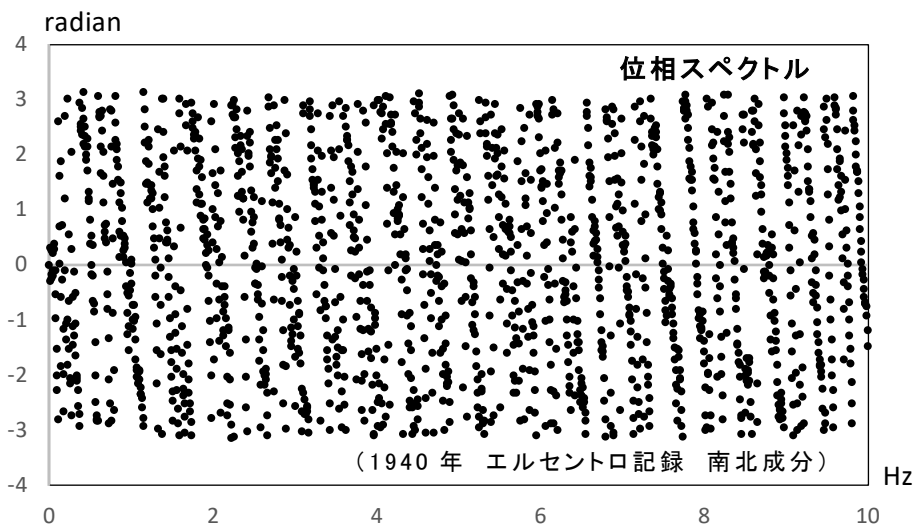
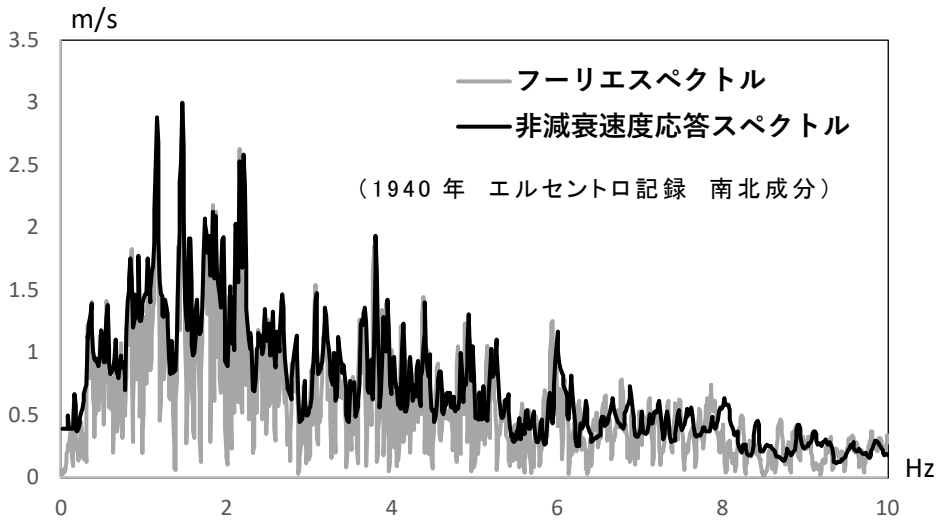
これより、非減衰の速度応答スペクトル  $S_v(\omega)_{h=0}$  と地動加速度のフーリエスペクトル  $|F(\omega)|$  の間に次式が成立することがわかる。

$$S_v(\omega)_{h=0} \approx |F(\omega)| \quad (76)$$

最大値の発生する時刻  $t$  が地震動の継続時間  $T$  と一致すれば、両者は完全に一致する。



エルセントロ記録について、フーリエスペクトル、非減衰速度応答スペクトル、位相スペクトルを以下に示す。



#### 参考文献

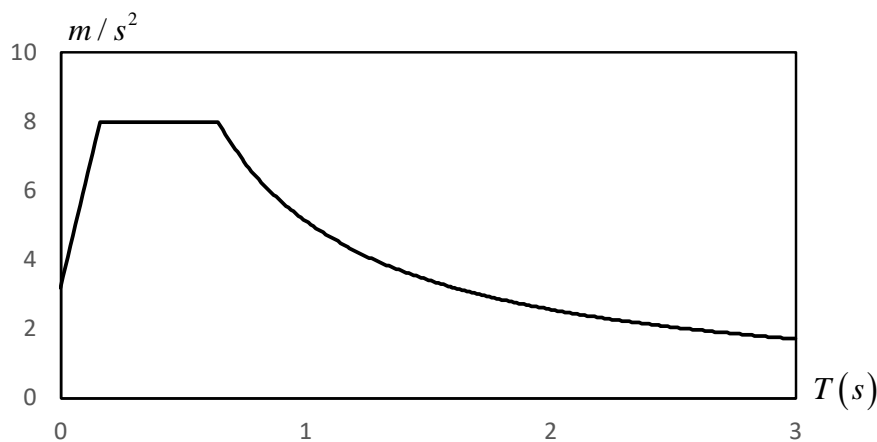
D. E. Hudson, "SOME PROBLEMS IN THE APPLICATION OF SPECTRUM TECHNIQUES TO STRONG-MOTION EARTHQUAKE ANALYSIS", Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 52, No. 2, pp. 417-430. April 1962

## 6. 模擬地震動の作成法

### 1) 設計用加速度応答スペクトル

建築基準法では、極めて稀に起こる地震の設計用加速度応答スペクトルを次式で定義している。しかし、波形の形では与えられていない。

$$S_A(m/s^2) = \begin{cases} 3.2+30T & (T < 0.16s) \\ 8.0 & (0.16s \leq T < 0.64s) \\ 5.12/T & (0.64s \leq T) \end{cases} \quad (77)$$



一方、高さ 60m を超える超高層建物の耐震設計では、地動加速度波形を用いた時刻歴応答解析が義務付けられている。以下に、フーリエ変換を用いて、設計用の加速度応答スペクトルに適合する地動加速度波形（模擬地震動）を作成する方法を示そう。

### 2) フーリエスペクトルの設定方法

いま、フーリエスペクトルと位相スペクトル

$$F_k, \phi_k, \quad k=0,1,2,\dots,N/2 \quad (78)$$

が与えられているとき、フーリエ係数は

$$C_k = |C_k| e^{i\phi_k} = (F_k/T)(\cos \phi_k + i \sin \phi_k), \quad k=0,1,2,\dots,N/2 \quad (79)$$

$$C_{N-k} = C_k^* \quad (80)$$

となるので、フーリエ逆変換から時刻歴波形が以下のように得られる。

$$x_m = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i\left(\frac{2\pi km}{N}\right)}, \quad m=0,1,2,\dots,N-1 \quad (81)$$

フーリエスペクトルについては、第一近似として非減衰の速度応答スペクトルを使うことを考える。

いま、減衰定数  $h=0.05$  の加速度応答スペクトル

$$S_A(f_k)_{h=0.05}, \quad k=0,1,2,\dots,N/2 \quad (82)$$

が与えられているとき、疑似速度応答スペクトルは

$$S_V(f_k)_{h=0.05} = S_A(f_k)_{h=0.05} / (2\pi f_k) \quad (83)$$

となる。非減衰 ( $h=0$ ) の速度応答スペクトルは、次の換算式から求める。

$$S_V(f_k)_{h=0} = F_h S_V(f_k)_{h=0.05} \quad (84)$$

$F_h$  は減衰による応答スペクトルの補正率であり、ここでは次式を用いる。

$$F_h = \frac{1.5}{1+10h} \quad (85)$$

従って、加速度波形のフーリエスペクトルの第一近似は、

$$F_k = S_V(f_k)_{h=0} = F_{h=0} S_V(f_k)_{h=0.05} = 1.5 S_V(f_k)_{h=0.05} \quad (86)$$

となる。

### 3) 位相スペクトルの設定方法

位相スペクトルについては、とくに決まった方法はなく、 $0 \sim 2\pi$  の一様乱数や実地震の位相スペクトルを用いることがある。

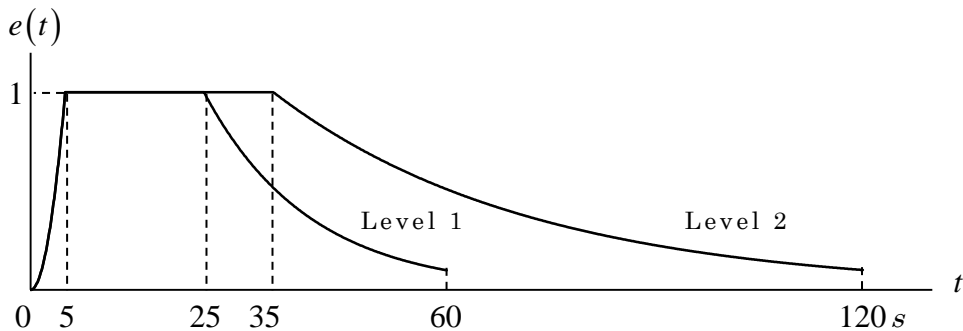
一様乱数を用いる場合には、時刻歴に包絡関数  $e(t)$  を掛けることが一般に行われる。(財)日本建築センター・設計用入力地震動作成手法技術指針案に示されている。地震動の包絡関数を以下に示す。

レベル 1 (使用限界)

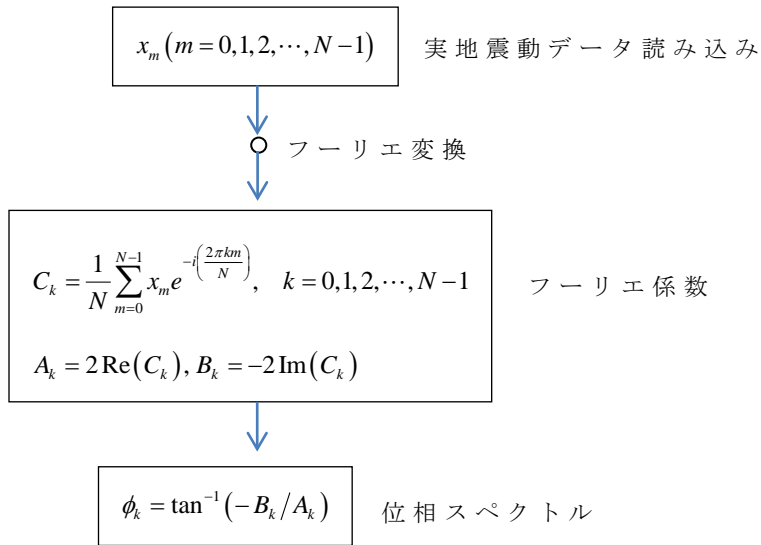
$$e(t) = \begin{cases} (t/5)^2 & (0s < t < 5s) \\ 1.0 & (5s \leq t < 25s) \\ \exp(-0.066(t-25)) & (25s \leq t < 60s) \end{cases}$$

レベル 2 (終局限界)

$$e(t) = \begin{cases} (t/5)^2 & (0s < t < 5s) \\ 1.0 & (5s \leq t < 35s) \\ \exp(-0.027(t-35)) & (35s \leq t < 120s) \end{cases}$$



実地震の位相スペクトルは以下の手順により求める。

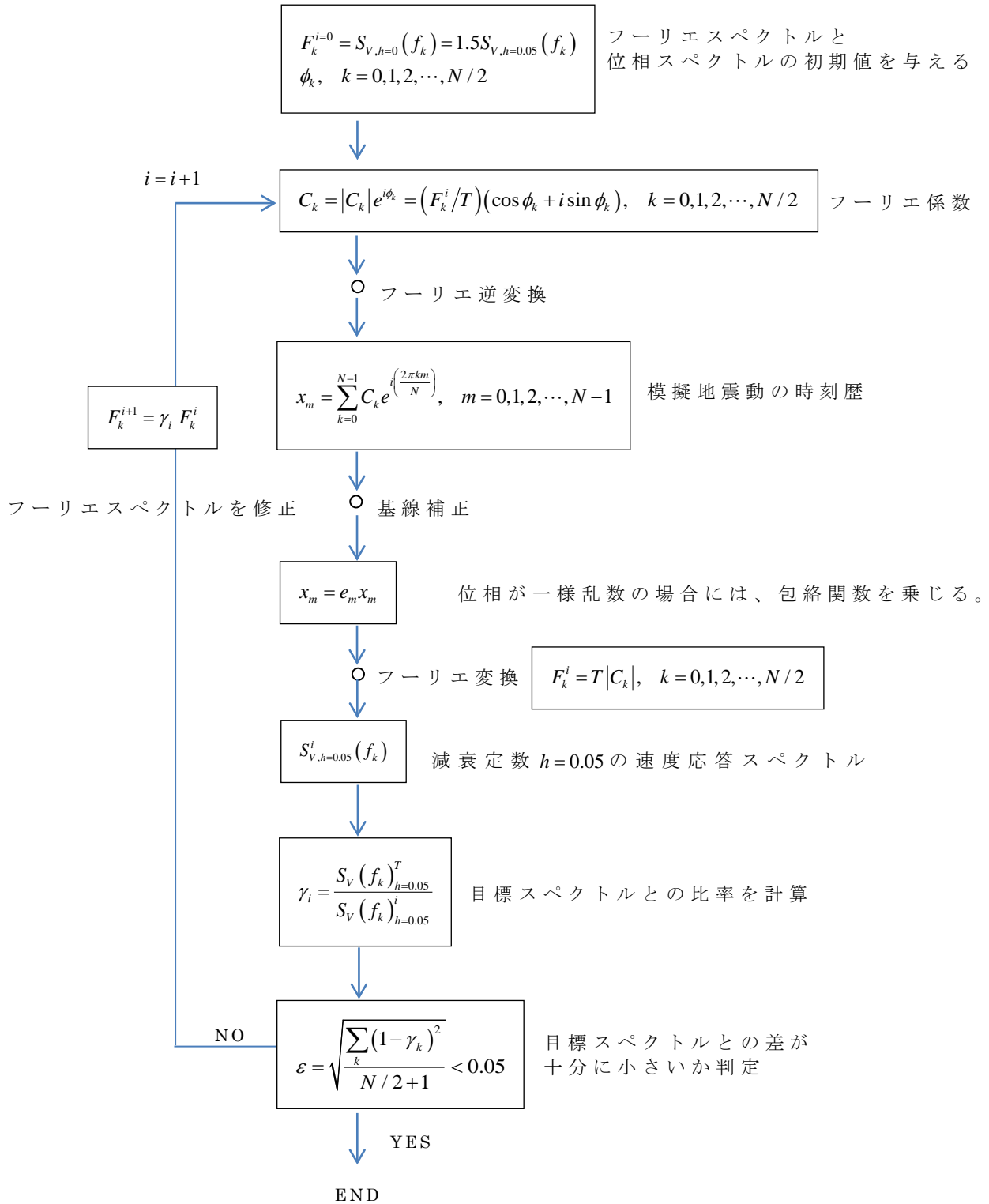


・ 計算フロー

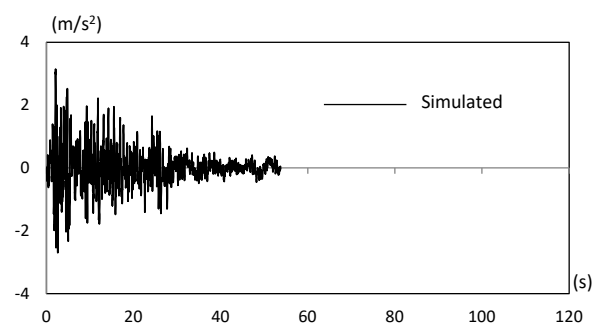
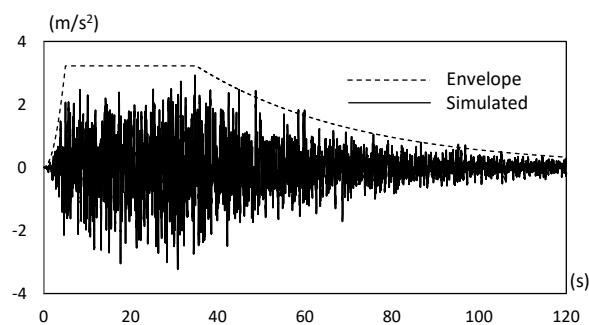
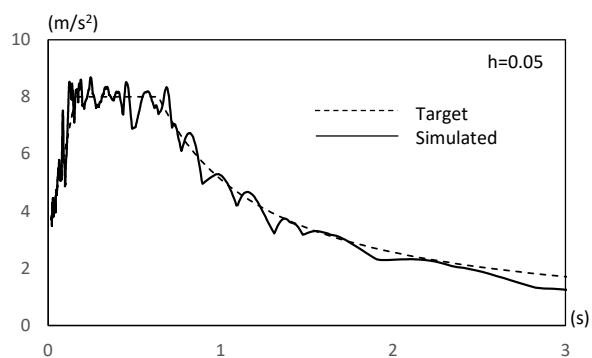
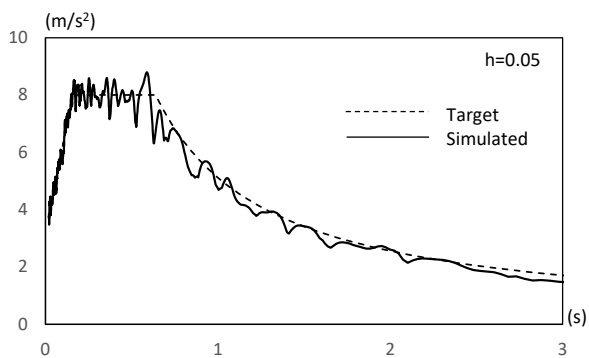
作成された模擬地震動の速度応答スペクトル  $S_V(f_k)^i$  を計算し、目標値  $S_V(f_k)^T$  との誤差が十分に小さくなるまで、フーリエスペクトルを修正して計算し直す。

$$F_k^{i+1} = \gamma_i F_k^i, \quad \gamma_i = \frac{S_V(f_k)_{h=0.05}^T}{S_V(f_k)_{h=0.05}^i} \quad (87)$$

以下に、模擬地震動の作成フローをまとめる。作成された加速度波形のゼロ軸（基線）がずれて不自然な波形にならないように、適宜ゼロ軸の補正を行う。



設計用加速度応答スペクトルに適合し、位相スペクトルが異なる模擬地震動の例を図に示す。両者とも加速度応答スペクトルは、よく適用しているが、波形の形は大きく異なっていることがわかる。



(a) random phase

(b) phase of 1995 Kobe earthquake

## 7. 自己相関関数とパワースペクトル

関数  $x(t)$  と  $x(t+\tau)$  の積の平均値を **自己相関関数** といい、次式のように表す。

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (88)$$

積分範囲を拡大すると

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad (89)$$

自己相関関数  $R(\tau)$  のフーリエ変換を **パワースペクトル (密度関数)**  $S(\omega)$  という。

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} d\tau \right] e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [F(\omega)] e^{i\omega t} dt = \frac{1}{T} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} F(\omega) F(-\omega) = \frac{1}{T} |F(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (90)$$

より、パワースペクトル  $S(\omega)$  はフーリエスペクトル  $|F(\omega)|$  の平均パワー (二乗) であることがわかる。

また、自己相関関数はパワースペクトルのフーリエ逆変換となる。

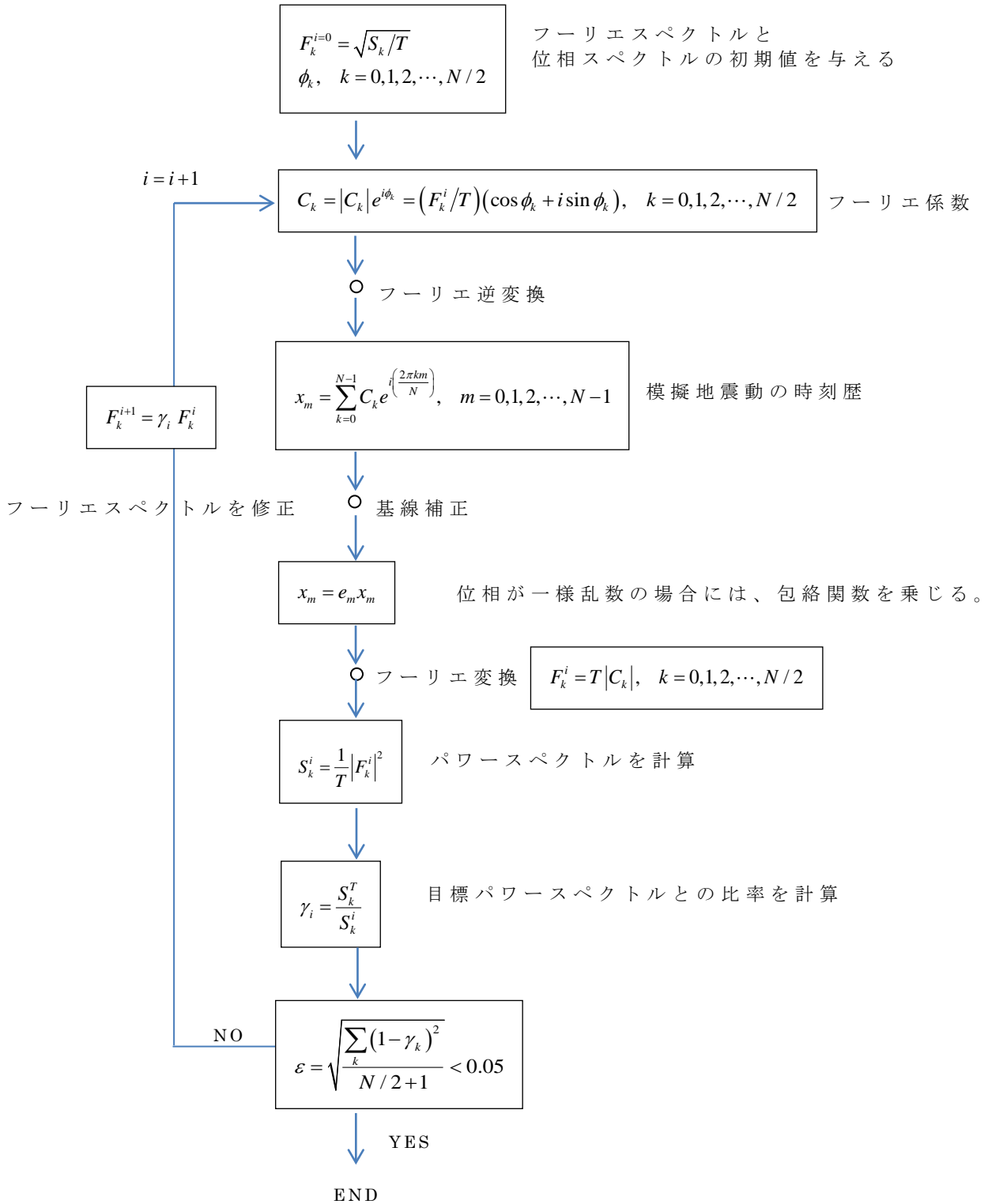
$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (91)$$

なお、 $S(\omega) = S(-\omega)$  であり、正負の周波数で同じ値をもつことから、正側の周波数のみを考慮した片側パワースペクトル  $G(\omega)$  を用いることも多い。

$$G(\omega) = 2S(\omega), \quad \omega > 0 \quad (92)$$

## 8. パワースペクトルに適合する波形作成

目標とするパワースペクトルに適合する波形を作成する場合には、前節の模擬地震動のフローは、より簡略になる。





参考文献

- 1) 大崎順彦著「地震動のスペクトル解析入門」鹿島出版会、1981年
- 2) 柴田明德著「最新耐震構造解析」森北出版、2014年